Sitzungsber. Abt. II (1999) 208: 31 – 78

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Gleichverteilung und die willkürlichen Funktionen von Poincaré, Teil II

Von

E. Hlawka

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 25. März 1999
durch das w. M. Edmund Hlawka)

Einleitung

Tullio Levi-Civita hat die fundamentale Erkenntnis gefunden, daß die Gleichungen für die Bewegung der Planeten auf die homogene Schwingungsgleichung zurückgeführt werden können. Diese Erkenntnis wurde von Pythagoras und Kepler schon in der Form erahnt, daß den Planeten Töne zugeordnet wurden.

E. Stiefel hat das Werk in seinem mit G. Scheifele verfaßten Buch [7] dargestellt und weitergeführt. Die Erkenntnis von Levi-Civita ermöglichtes nun, die Theorie der Gleichverteilung auf die Theorie der Planetenbewegungen anzuwenden.

Es ist weiters bekannt, daß auch das Modell von Friedmann-Lemaître-Milne-Heckmann, und damit die Friedmannsche Gleichung auf die homogene Schwingungsgleichung zurückgeführt werden kann. Die Tatsache, daß es mehrere Planetenbahnen gibt, hat mich dazu angeregt, rein mathematisch auch mehrere Welten einzuführen. Damit will ich nichts über die tatsächliche Existenz solcher Welten aussagen (Dies gilt vielleicht noch mehr für die Anmerkung 4). Es ist mir bewußt, daß ich mich damit am Rande des für einen Mathematiker Erlaubten bewege.

Als Ergänzung zu der im Text angegebenen Literatur verweise ich auf das Werk von Jan von Plato [6].

Ich möchte noch bemerken, daß die Kenntnis von Teil I nicht vorausgesetzt wird, die Lektüre des Epiloges wird allerdings empfohlen.

Zum Schluß möchte ich Frau Marianne Wenger meinen herzlichsten Dank für die Abfassung des Manuskripts aussprechen.

1

Wir betrachten zunächst die Gleichung

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{K}{r^2} = 0 \tag{1}$$

nach der Methode von Levi-Civita, die dann vor allem von E. Stiefel ([7]) entwickelt wurde.

Wir gehen direkt vor, indem wir die von Levi-Civita angegebene Lösung verifizieren.

Es sei ω eine beliebige positive Zahl, und wenn $K > 0$ ist, dann definieren wir die positive Zahl a durch

$$a^2 = \frac{K}{2\omega^2}. \tag{2}$$

Dann setzen wir als Lösung von (1) an:

$$r = a^2\big(\cos(\omega\tau + \psi)\big)^2 \tag{3}$$

wo ψ modulo 2π bestimmt ist und definieren die Zeit T durch das Integral

$$t = \int r d\tau, \tag{4}$$

welches nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

Es ist also

$$\frac{dt}{d\tau} = r.$$

Wir nennen τ die fiktive Zeit im Gegensatz zur Zeit t.

Wir zeigen nun, daß die Funktionen $r(\tau)$ und $t(\tau)$ eine Parameterdarstellung der Lösungen von (1) sind. Zu diesem Zweck definieren wir als Geschwindigkeit

$$v = \frac{dr}{dt} \tag{5}$$

und benützen, daß

$$v = \frac{dr}{d\tau} \Big/ \frac{dt}{d\tau}$$

ist, und erhalten

$$v = 2\omega \frac{\sin 2(\omega\tau + \psi)}{1 + \cos(2(\omega\tau + \psi))} = \omega \operatorname{tg}\omega(\tau + \psi).$$

Es wird also (wir setzen $\eta = \omega\tau + \psi$)

$$\frac{v^2}{2} - \frac{K}{r} = 2\omega^2 \left((\operatorname{tg}\eta)^2 - \frac{1}{(\cos\eta)^2} \right) = -\omega^2, \tag{6}$$

da

$$\frac{1}{\cos^2\eta} - \operatorname{tg}^2\eta = 1$$

ist.

Es ist nun

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2},$$

die Differentiation von (6) ergibt (1). Dabei muß

$$\frac{dt}{d\tau} \neq 0$$

sein. Es ist rückblickend (6) die Energiegleichung mit der Integrationskonstanten ω^2 Es ist

$$u = a\cos(\omega\tau + \psi) \tag{7}$$

die Lösung der Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \omega^2 u = 0 \tag{8}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0) = a\cos\psi, \quad u'(0) = -\omega a \sin\psi.$$

Wählen wir nun eine gleichverteilte Folge (φ_k) modulo 1, so erhalten wir die Schar der Lösungen $(\psi_k = 2\pi\varphi_k)$

$$u_k(\tau) = a\cos(\omega\tau + \psi_k), \tag{9}$$

und für (1) die Schar der Lösungen

$$r_k(\tau) = u_k^2(\tau) = a^2 \cos^2(\omega\tau + \psi_k) \tag{10}$$

und

$$t_k = \int_0^\tau r_k(\sigma) d\sigma + C_k,$$

wo C_k Konstante sind.

2

Wir betrachten nun s solche Gleichungen (1′) mit Konstanten K^j, also

$$\frac{d^2 r^j}{dt^2} + \frac{K^j}{(r^j)^2} = 0 \tag{1'}$$

($j=1,\ldots,s$). Ein Beispiel: Es seien s Teilchen p^j mit den Massen m^j für $j=1,\ldots,s$ gegeben, die von einem Stern S mit der Masse M nach dem Newtonschen Gesetz angezogen werden. Dabei ist dann

$$K^j = G(M + m^j)$$

($G > 0$ Konstante).

Es seien die zugehörigen Energiekonstanten $\omega_1^2, \ldots, \omega_s^2$ mit

$$\omega_1^2 + \ldots + \omega_s^2 = E$$

die Gesamtenergie.

Weiter sei (a_j positiv)

$$a_j^2 = \frac{K^j}{2\omega_j^2}, \tag{2'}$$

dann sind wieder Lösungen des Systems (1′) gegeben durch ($\psi_j^k = 2\pi\varphi_j^k$)

$$r_k^j = u_{jk}^2(\tau) = \left(a^j\right)^2 \cos\left(\omega_j\tau + \psi_k^j\right)^2$$

wo $(\varphi_k^1, \ldots, \varphi_k^s)$ eine gleichverteilte Folge in E^s ist. Weiter ist dann

$$t_k^j = \int_0^\tau r_k^j(\sigma) d\sigma.$$

Wir erhalten die s Geschwindigkeiten

$$v_k^j = \omega_j \operatorname{tg}(\omega_j\tau + \psi_k^j)$$

und $(u_{jk}, \ldots, u_{sk})$ sind Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} + \omega_j^2 u_j = 0 \tag{8'}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u_{jk}(0) = a^j \cos\left(\psi_k^j\right),$$

da

$$\frac{du_{jk}(0)}{d\tau} = -\omega_j a^j \sin\left(\psi_k^j\right).$$

Wir haben bis jetzt den Fall betrachtet, daß alle K_j positiv sind. Wir untersuchen nun den Fall, daß alle K_j negativ sind (man könnte natürlich auch den Fall nehmen, daß nur ein Teil der K_j positiv sind, und die anderen K_j negativ sind. Dies wollen wir der Kürze halber nicht besprechen). Dann definieren wir die a_j durch die Gleichung $(K_j' = K_j)$

$$a_j^2 = -\frac{K_1}{\omega_j^2} = \frac{K_j'}{\omega_j^2}. \tag{2''}$$

Wir nehmen jetzt die u_j von der Gleichung

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \omega_j^2 u_j = 0,$$

also

$$u_j = \cos(\omega\tau + \psi_j)$$

(wir benützen jetzt die hyperbolischen Funktionen cos, sin, tan). Es wird dann

$$r^j = (u_j)^2 = (\cos(\omega\tau + \psi_j))^2$$

und

$$v_j = \omega_j \tan\omega(\tau + \psi_j).$$

Es wird also $(\eta_i = \omega_j(\tau + \psi_j))$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{K_j}{r_j} = \omega_j\left((\tan\eta_j)^2 + \frac{1}{(\cos\eta_j)^2}\right) = \omega_j^2$$

für $j = 1, \ldots, s$. Hier haben wir benützt, daß $\cos^2 - \sin^2 = 1$ ist.

Wir wollen die beiden Fälle: Fall I (alle K_j größer 0) und Fall II (alle $K_j < 0$) noch weiter untersuchen, indem wir auf die Fälle eine stereogra-

phische Abbildung ausüben. Es wird sich zeigen, daß wir im Falle I, in dem trigonometrische Funktionen bei der Darstellung der Lösungen verwendet wurden, jetzt hyperbolische Funktionen benützen werden müssen, dagegen ist es im Fall II gerade umgekehrt.

Besprechen wir jetzt **Fall I** und kehren wir jetzt zum Fall (10) zurück. Es ist also

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{K_j}{r_j}-\frac{v_j^2}{2}\right)=\sum_{j=1}^{s}\omega_1^2=E. \tag{11}$$

Wir setzen für $j=1,\dots,s$

$$A_j=\frac{1}{\sqrt{E}}\sqrt{\xi_{2j-1}^2-\xi_{2j}^2}. \tag{12}$$

Es ist $A_1^2+\quad+A_s^2=1$. Wir setzen nun

$$\xi_{2j-1}+\xi_{2j}=\sqrt{E}A_je^{\vartheta_j} \tag{13$_1$}$$

$$\xi_{2j-1}-\xi_{2j}=\sqrt{E}A_je^{-\vartheta_j}, \tag{13$_2$}$$

also

$$\xi_{2j-1}=\sqrt{E}A_j\cos\vartheta_j \tag{14$_1$}$$

und

$$\xi_{2j}=\sqrt{E}A_j\sin\vartheta_j. \tag{14$_2$}$$

Wir führen nun die Variablen $x_1,\dots,x_{2s}$ durch die (stereographische) Projektion in bezug auf das Hyperboloid (10) ein:

$$x_{2j-1}+x_{2j}=\sqrt{E}\frac{\xi_{2j-1}+\xi_{2j}}{1-\frac{\xi_{2s}}{\sqrt{E}}}=\sqrt{E}\frac{A_je^{\vartheta_j}}{1-A_s\sin\vartheta_s}$$

und

$$x_{2j-1}-x_{2j}=\sqrt{E}\frac{\xi_{2j-1}-\xi_{2j}}{1-\frac{\xi_{2s}}{\sqrt{E}}}=\sqrt{E}\frac{A_je^{-\vartheta_j}}{1-A_s\sin\vartheta_s}.$$

Es ist also

$$x_{2j-1}=\sqrt{E}\frac{A_j\cos\vartheta_j}{1-A_s\sin\vartheta_s} \tag{15$_1$}$$

und

$$x_{2j}=\sqrt{E}\frac{A_j\sin\vartheta_j}{1-A_s\sin\vartheta_s}. \tag{15$_2$}$$

Setzen wir

$$\mu_j = \sqrt{x_{2j-1}^2 - x_{2j}^2} = \sqrt{E}\frac{A_j}{1 - A_s \sin \vartheta_s}, \tag{16}$$

so wird

$$x_{2j-1} = \mu_j \cos \vartheta_j, \quad x_{2j} = \mu_j \sin \vartheta_j.$$

Es ist insbesondere

$$\cos \vartheta_j = \frac{x_{2j-1}}{\mu_j}. \tag{17}$$

Wir setzen nun

$$z = x_{2j-1} = \sqrt{E}\frac{A_s \cos \vartheta_s}{1 - A_s \sin \vartheta_s}. \tag{18}$$

Es ist dann

$$\cos \vartheta_j = \frac{A_j}{A_s}\frac{z}{\mu_j}. \tag{19}$$

Wir haben nun

$$\mu_j(1 - A_s \sin \vartheta_s) = \sqrt{E} A_j$$

oder

$$\mu_j - \sqrt{E} A_j = \mu_j A_s \sin \vartheta_s$$

oder

$$(\mu_j - \sqrt{E} A_j)^2 = \mu_j^2 A_s^2 \sin \vartheta_s. \tag{20}$$

Es ist nun

$$\cos^2 \vartheta_s - \sin^2 \vartheta_s = 1, \tag{*}$$

also erhalten wir für die rechte Seite von (20) nach (19)

$$\mu_j^2 A_s^2 \left(\left(\frac{A_j}{A_s}\frac{z}{u_j} \right)^2 - 1 \right) = A_1^2 z^2 - \mu_j^2 A_s^2.$$

Setzen wir dies in (15) ein und quadrieren die rechte Seite von (20) aus, so erhalten wir

$$\mu_j^2(1 + A_s^2) - 2\sqrt{E} A_j \mu_j + (E - z^2) A_j^2 = 0. \tag{21}$$

Dividieren wir diese Gleichung durch den Koeffizienten $1 + A_s^2$ von μ_j^2 und ergänzen auf ein Quadrat, so erhalten wir

$$\left(r^j - \frac{A_j\sqrt{E}}{1+A_s^2}\right)^2 - \frac{A_j^2}{1+A_s^2}z^2 - \frac{EA_j^2A_s^2}{(1+A_s^2)^2}.$$

Setzen wir für μ_j die Definition (16) ein, so erhalten wir für $j=1,\ldots,s$

$$\frac{A_j^2}{1+A_s^2}z^2 - \left(\sqrt{x_{2j-1}^2 - x_{2j}^2} - \frac{A_j\sqrt{E}}{1+A_s^2}\right)^2 = \frac{EA_j^2A_s^2}{(1+A_s^2)^2}. \tag{22}$$

Wir haben vor uns s Flächen ($j=1,\ldots,s$) im (x_{2j-1}, x_{2j}, z)-Raum.

Auf der Gesamtheit dieser Flächen, die nur in der z-Koordinate zusammenhängen, liegt die τ-Kurve, die wir vorher studiert haben. Wir setzen

$$\xi_{2j-1} = \frac{K_j}{(a^j\cos(\omega_j\tau + \psi_k^j))^2}, \quad \xi_{2j} = \frac{v_j}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_j \tan\omega_j(\tau + \psi_k^j)}{\sqrt{2}}.$$

Die Flächen hängen noch durch die Gleichung

$$A_1^2 + \quad + A_s^2 = 1 \tag{23}$$

zusammen.

Betrachten wir nun den **Fall II**

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{K_j}{r_j} + \frac{v_j^2}{2}\right) = \sum_{j=1}^{s}\omega_j^2 = E. \tag{11'}$$

Statt dem Hyperboloid in Fall I haben wir jetzt die Sphäre

$$\xi_1^2 + \quad + \xi_s^2 = E.$$

Wir setzen jetzt für $j=1,\ldots,s$

$$A_j = \frac{1}{\sqrt{E}}\sqrt{\xi_{2j-1}^2 + \xi_{2j}^2}. \tag{12'}$$

Es gelten dann statt (14_1), (14_2) die Formeln

$$\xi_{2j-1} = \sqrt{E}A_j\cos\vartheta_j \tag{14'_1}$$

und

$$\xi_{2j} = \sqrt{E}A_j\sin\vartheta_j. \tag{14'_2}$$

Wir haben statt den hyperbolischen Funktionen cos und sin die trigonometrischen Funktionen. Die stereographische Projektion lautet jetzt (sie ist tatsächlich die klassische Projektion in bezug auf die Sphäre)

$$x_{2j-1} = \sqrt{E}\frac{A_j \cos\vartheta_j}{1 - A_s \sin\vartheta_s} \tag{$15_1'$}$$

und

$$x_{2j} = \sqrt{E}\frac{A_j \sin\vartheta_j}{1 - A_s \sin\vartheta_s}. \tag{$15_2'$}$$

Die Definition (16) ist nun abzuändern

$$\mu_j = \sqrt{x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2}, \tag{$16'$}$$

(17), (18), (19) und (20) bleiben unverändert, es sind nur die hyperbolischen durch die trigonometrischen Funktionen zu ersetzen. Jetzt ist für die weitere Rechnung die Formel (∗) durch die Formel

$$\cos^2\vartheta_s + \sin^2\vartheta_s = 1$$

zu ersetzen. Dies bedeutet, daß nun (21) so lautet

$$\mu_j^2(1 - A_s^2) - 2\sqrt{E}\mu_j A_j + A_j^2(z^2 + E) = 0. \tag{$21'$}$$

Wir setzen nun voraus, daß

$$A_s^2 < 1 \tag{$**$}$$

ist. Der Fall $A_s^2 = 1$ würde bedeuten, daß alle anderen A_j gleich Null sind.

Wir dividieren ($21'$) durch $1 - A_s^2$, ergänzen wieder in μ_j auf ein Quadrat und erhalten

$$\left(\mu_j - \frac{A_j\sqrt{E}}{1 - A_s^2}\right)^2 + \frac{A_1^2 z^2}{1 - A_s^2} = \frac{E A_j^2 A_s^2}{(1 + A_s^2)^2}.$$

Setzen wir wieder für μ_j die Formel ($16'$) ein, so erhalten wir s Tori

$$\left(\sqrt{x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2} - \frac{A_j\sqrt{E}}{1 - A_s^2}\right)^2 + \frac{A_j^2}{1 - A_s^2} z^2 = \frac{E A_j^2 A_s^2}{(1 - A_s^2)^2}. \tag{$22'$}$$

Für $j = 1, \ldots, s$ im (x_{2j-1}, x_{2j}, z)-Raum setzen wir

$$\xi_{2j-1} = \frac{K_j}{(a^j \cos(\omega_j\tau + \psi_k^j))^2}, \quad \xi_{2j} = \omega_j \tan(\omega_j\tau + \psi_k^j).$$

Schaffen wir in (22) noch die Quadratwurzel weg, so erhalten wir

$$\left(x_{2j-1}^2 - x_{2j}^2 + \frac{A_j^2}{1+A_s^2}z^2 - EA_j^2\frac{1-A_j^2}{(1+A_s^2)^2}\right)^2 = x_{2j-1}^2 - x_{2j}^2 - \frac{4EA_j^2}{(1+A_s^2)^2}.$$

Es sind dies also Flächen vierter Ordnung, so wie dies auch im Fall I, wo wir ja Tori vor uns haben, der Fall ist. Wir wollen aber trotzdem die Formeln hinschreiben:

$$\left(x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2 + \frac{A_j^2}{1-A_s^2}z^2 - EA_j^2\frac{1+A_j^2}{(1-A_s^2)^2}\right)^2 = -(x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2) + \frac{4EA_j^2}{(1-A_s^2)^2}.$$

3

Wir behandeln jetzt den zweidimensionalen Fall

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Kx}{r^2} = 0, \tag{1}$$

wo x der Vektor (x_1, x_2) und $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ist. Die zugehörige Schwingungsgleichung ist

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \omega^2 u = 0. \tag{2}$$

Es sei a eine positive Zahl, dann gilt

$$a\omega^2 = K.$$

Es sei

$$u = (u_1, u_2) = (A\cos(\omega\tau + \psi),\ B\sin(\omega\tau + \psi)).$$

Wir setzen

$$A = \sqrt{a}\cos\frac{a}{2}, \quad B = \sqrt{a}\sin\frac{a}{2}. \tag{3}$$

Es wird also $A^2 + B^2 = a$. Wir setzen noch

$$E = \omega\tau + \psi \tag{4}$$

und nennen sie, wie in der Astronomie üblich, die exzentrische Anomalie. Wir können also den Vektor u in der Form schreiben

$$u = \sqrt{a}\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{E}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{E}{2}\right). \tag{5}$$

Wir setzen im Anschluß an Levi-Civita

$$x_1 = u_1^2 - u_2^2$$
$$x_2 = 2u_1u_2. \tag{6}$$

Um zu viele Indizes zu vermeiden, schreiben wir $x_1 = x, \; x_2 = y$ und haben also $(i = \sqrt{-1})$

$$x + iy = (u_1 + iu_2)^2 \tag{7}$$

Weiter setzen wir für die Zeit t

$$t = \int r d\tau. \tag{8}$$

τ heißt natürlich wieder die fiktive Zeit. Es wird dann unter Benützung der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

$$x = a(\cos\alpha + \cos E) \tag{9}$$

$$y = a \sin\alpha \sin E \tag{10}$$

und

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1 + \cos\alpha \cos E). \tag{11}$$

Für den Geschwindigkeitsvektor v erhalten wir nach (8)

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) \Big/ r.$$

Es ist

$$\frac{dx}{d\tau} = -a\omega \sin\tau, \quad \frac{dy}{d\tau} = a\omega \sin a \cos E.$$

Es wird also

$$\vec{v} = \frac{\omega}{1 + \cos\alpha\cos E}(-\sin E, \sin\alpha\cos E) \tag{12}$$

und für das skalare Quadrat der Geschwindigkeit

$$v^2 = \frac{\omega^2}{(1 + \cos\alpha\cos E)^2}\left(-\sin^2 E + \sin^2\alpha\cos^2 E\right). \tag{13}$$

Wir betrachten auch gleich den Ausdruck

$$[x, \dot{x}] = x\frac{dy}{dt} = y\frac{dx}{dt}. \tag{14}$$

Man nennt diesen Ausdruck bekanntlich die Flächengeschwindigkeit. Wir erhalten nach kurzer Rechnung

$$[x, \dot{x}] = 2a\omega \sin\alpha. \tag{15}$$

Diese Flächengeschwindigkeit ist also konstant (zweites Keplersches Gesetz). Aus (9) und (10) ist sofort ersichtlich, daß hier eine Ellipse mit dem Parameter E vorliegt von der Gestalt

$$\left(\frac{x}{a} - \cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{y}{a\sin\alpha}\right)^2 = 1.$$

Es handelt sich also um eine Ellipse mit Mittelpunkt $(e, 0)$, wo

$$e = a\cos\alpha = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{16}$$

ist, die große Achse ist a, die Nebenachse $b = a \sin\alpha$. Der eine Brennpunkt dieser Ellipse liegt im Nullpunkt $(0,0)$ (die Sonne) (erstes Keplersches Gesetz). Es ist e die Exzentrizität und

$$\varepsilon = \cos\alpha = \frac{e}{a} \tag{17}$$

ist die numerische Exzentrizität. Um die bekannte Darstellung der Ellipse in Polarkoordinaten zu erhalten, müssen wir den Winkel Φ (wahre Anomalie) durch

$$\cos\Phi = \frac{x}{r} = \frac{\cos\alpha + \cos E}{1 + \cos\alpha\cos E} \tag{18}$$

und

$$\sin\Phi = \frac{y}{r} = \frac{\sin\alpha\sin E}{1 + \cos\alpha\cos E} \tag{19}$$

einführen. Es wird

$$1 - \cos\alpha\cos\Phi = \frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha\cos E} = \frac{a\sin^2\alpha}{r}. \tag{20}$$

Man bezeichnet oft auch $\Phi' = \pi - \Phi$ als die wahre Anomalie. Aus (20) folgt sofort die gesuchte Darstellung

$$r = \frac{a\sin^2\alpha}{1 - \cos\alpha\cos\Phi} = \frac{a\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha\cos\Phi'} = \frac{p}{1 + \cos\alpha\cos\Phi'}.$$

Es ist

$$p = a \sin^2 \alpha = a(1 - \varepsilon^2),$$

der sogenannte Parameter der Ellipse.

Es sei noch bemerkt, daß bei unserer Darstellung Φ von der fiktiven Zeit τ, ψ und ω abhängt. Wenn wir jetzt die Flächengeschwindigkeit in Polarkoordinaten $x = r \cos \Phi, y = r \sin \Phi$ ausdrücken, so erhalten wir die berühmte Formel von Kepler

$$r^2 \frac{d\Phi}{dt} = a\omega \sin \alpha = 2a\omega\varepsilon^*, \tag{21}$$

wo

$$\varepsilon^* = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \tag{22}$$

ist.

Um in dieser Formelkette noch weiter fortzusetzen, die heutzutage trivial erscheint, die aber eine lange Entwicklung hinter sich hat, bilden wir uns

$$1 + \cos \Phi = \frac{(1 + \cos \alpha)(1 + \cos E)}{1 + \cos \alpha \cos E}$$

und

$$1 - \cos \Phi = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos E)}{1 + \cos \alpha \cos E}$$

und erhalten

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} = \frac{1 - \cos \Phi}{1 + \cos \Phi} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \frac{1 - \cos E}{1 + \cos E} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2},$$

also die bis heute verwendete berühmte Formel

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \tag{23}$$

Wenn wir noch einmal auf (11) zurückkommen, so erhalten wir für $E = \pi$ das Perihel $\Pi = a(1 - \cos \alpha)$, also wenn wir $\cos \alpha = \varepsilon$ positiv annehmen, den kleinsten Wert für r, also das Perihel, und für $E = 0$ den größten Wert, das Aphel. Es muß dann bei unserer Darstellung

$$\omega\tau + \psi = 0$$

sein, also

$$t = -\frac{\psi}{\omega}.$$

Wir werden darauf noch zu sprechen kommen.

Wir können aus (21) den Winkel Φ noch explizit durch t darstellen: Es ist

$$\frac{d\Phi}{dt} = K\frac{a\omega\varepsilon^*}{r^2}.$$

Es ist also

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{a\omega\varepsilon^*}{r},$$

also

$$\Phi = \omega\varepsilon^* \int \frac{d\tau}{1+\varepsilon\cos E}.$$

Wir wollen noch t als Funktion von E darstellen

$$t = a\int_0^\tau (1+\cos a\cos E)d\sigma,$$

wobei

$$E = \omega\sigma + \psi$$

war. Es wird also

$$t = a\left(\tau + \frac{\varepsilon\sin E}{\omega}\right) + C,$$

wo C eine Konstante ist, nämlich bei uns

$$C = -\frac{a\sin\psi}{\omega}.$$

Es besitzen cos E bzw. sin E die Periode (π/ω). Es wird daher die Umlaufzeit

$$T = \frac{a2\pi}{\omega}.$$

Nun ist $\omega = \frac{\sqrt{K}}{a}$, also wird

$$T = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{K}}2\pi,$$

also

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K}$$

(drittes Keplersches Gesetz).

Es ist nun (3) und (11)

$$\frac{K}{r} = \frac{\omega^2}{1 + \cos\alpha\cos E}. \tag{24}$$

Benützen wir (18), indem wir noch die Formel $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, berücksichtigen, so erhalten wir

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\frac{1 - \cos^2\alpha\cos^2 E}{(1 + \cos\alpha\cos E)^2}, \tag{25}$$

dann wird also

$$\frac{v^2}{2} - \frac{K}{r} = -\frac{\omega^2(\cos^2\alpha\cos^2 E - 1 + 2(1 + \cos\alpha\cos E)}{(1 + \cos\alpha\cos E)^2},$$

also wieder die Energiegleichung

$$\frac{v^2}{2} - \frac{K}{r} = -\omega^2 \tag{26}$$

Differenzieren wir (26) und die Gleichung (15) nach t, so erhalten wir[1]

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = -\frac{K}{r^2}\frac{dr}{dt} \tag{27}$$

$$y\ddot{x} - x\ddot{y} = 0. \tag{28}$$

Die Gleichungsdeterminante ist nun, wenn $r \neq 0$

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r\frac{dr}{dt} \neq 0$$

und wir erhalten die Newtonschen Formeln

$$\ddot{x} = \frac{K}{r^3}x$$

$$\ddot{y} = \frac{K}{r^3}y. \tag{29}$$

Wir betrachten noch kurz den Fall der Hyperbel. Wir brauchen nur wieder die trigonometrischen durch die hyperbolischen Funktionen zu ersetzen. Wir erhalten

$$x = a(\mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Cos}\,E) \tag{5'}$$

$$y = a\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,E \tag{6'}$$

$$r = a(1 + \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,E). \tag{7'}$$

[1]Die Gleichung (28) ist auch an und für sich interessant und steht auch in anderer Weise in enger Verbindung mit der Schwingungsgleichung (vgl. P. Funk, Variationsrechnung).

Es wird

$$\left(\frac{x}{a} - \cos\alpha\right)^2 - \left(\frac{y}{a\,\sin\alpha}\right)^2 = 1 \tag{**}$$

$$\cos\Phi = \frac{\cos\alpha + \cos E}{1 + \cos\alpha\,\cos E} = \frac{x}{r} \tag{18'}$$

$$\sin\Phi = \frac{\sin\alpha + \sin E}{1 + \cos\alpha\,\cos E} = \frac{y}{r}. \tag{19'}$$

Es wird

$$1 - \cos\alpha\cos\varphi = -\frac{\sin^2\alpha}{a(1 + \cos\alpha\,\cos E)}. \tag{20'}$$

Wir erhalten

$$r = \frac{p}{1 - \cos\alpha\cos\Phi} \tag{+}$$

bzw. mit $\Phi' = \pi - \Phi$

$$\frac{p}{1 + \cos\alpha\cos\Phi}, \tag{++}$$

wo $p = -a\sin^2 a$ ist.

Wir setzen noch $\varepsilon = \cos\alpha > 1$ und $e = a\varepsilon$. Es wird

$$[x, x'] = a\,\omega\sin\alpha. \tag{15'}$$

Wir können nun, wie schon in §2, mehrere Planeten mit zugehörigen $\omega_1, \quad ., \omega_s$ mit

$$\omega_1^2 + \quad + \omega_s^2 = E$$

betrachten (Pythagoras nannte dies eine Harmonie).

Wir wollen noch studieren, was geschieht, wenn wir, sagen wir im elliptischen Fall, eine Drehung auf diese Kegelschnitte ausführen. Nehmen wir eine Drehung mit der Drehgeschwindigkeit Ωt. Es sei

$$x = \xi\cos\Omega t + \eta\sin\Omega t$$
$$y = -\xi\sin\Omega t + \eta\cos\Omega t.$$

Es wird

$$\dot{x} = \dot{\xi}\cos\Omega t + \dot{\eta}\sin\Omega t + \Omega y$$
$$\dot{y} = -\dot{\xi}\sin\Omega t + \dot{\eta}\cos\Omega t - \Omega x.$$

Daraus folgt

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \Omega^2(x^2 + y^2) + 2\Omega(\dot{x}y - \dot{y}x)$$

und

$$\dot{x}y - \dot{y}x = \dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi + \Omega(x^2 + y^2).$$

Wenden wir (18) und (26) an, so erhalten wir

$$\frac{1}{2}\left((\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \Omega^2(\xi^2 + \eta^2) - \frac{K}{r}\right) = -\omega^2 - \Omega a\omega \sin\alpha$$

und

$$\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi = a\omega \sin\alpha - \Omega(\xi^2 + \eta^2).$$

Weiter ist jetzt

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$$

Wir differenzieren wieder und erhalten bei Auflösung der beiden Gleichungen

$$\ddot{\xi} - 2\Omega\dot{\eta} = \left(\frac{K}{r^2} - \Omega^2\right)\xi$$

$$\ddot{\eta} + 2\Omega\dot{\xi} = \left(\frac{K}{r^2} - \Omega^2\right)\eta.$$

Führen wir auch in §1 eine Drehung durch

$$x = r\cos\Omega t$$

$$y = r\sin\Omega t,$$

so erhalten wir analog

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\Omega t - \Omega r\sin\Omega t$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\Omega t + \Omega r\cos\Omega t,$$

weiters

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} = \frac{1}{2}(v^2 + \Omega r^2) = \frac{K}{r} - \omega^2 + \frac{1}{2}\Omega r^2$$

und

$$-y\dot{x} + x\dot{y} = \Omega r^2$$

Differenzieren dieser beiden Gleichungen und das Auflösen der differenzierten Gleichungen liefert

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} = \left(-\frac{K}{2r^2} + \Omega r \right) \frac{x}{r}$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} = \left(-\frac{K}{2r^2} + \Omega r \right) \frac{y}{r}$$

mit $r^2 = x^2 + y^2$

Anhang zu §3

Ersetzen wir in Formel (18) und (19) $\cos\Phi$ durch X', $\sin\Phi$ durch Y', so erhalten wir nach G. Kowalewski eine Transformation, welche in der nichteuklidischen Geometrie wohl bekannt ist:

$$X' = \frac{X + \cos\alpha}{\cos\alpha X + 1}, \quad Y' = \frac{2Y \sin\alpha}{\cos\alpha X + 1}, \tag{$*$}$$

welche den Kreis $X^2 + Y^2 = 1$ in den Kreis $X'^2 + Y'^2 = 1$ überführt. Ersetzen wir in $(*)$ die trigonometrischen Funktionen durch die hyperbolischen Funktionen, so erhalten wir die Transformation

$$X' = \frac{X + \cos\alpha}{X\cos\alpha + 1}, \quad Y' = \frac{2Y \sin\alpha}{X \cos\alpha + 1}, \tag{$**$}$$

welche die Hyperbel $X^2 - Y^2 = 1$ in den Kreis $X'^2 - Y'^2 = 1$ überführt.

Führen wir homogene Koordinaten

$$X = \frac{\xi}{\zeta}, \quad Y = \frac{\eta}{\zeta}, \quad \text{bzw.} \quad X' = \frac{\xi'}{\zeta'}, \quad Y' = \frac{\eta'}{\zeta'}$$

ein, so erhalten wir im elliptischen Fall die projektive Transformation A

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + \zeta\cos\alpha \\ \eta' &= 2\eta\sin\alpha \\ \zeta' &= \xi\cos\alpha + \zeta. \end{aligned}$$

Ordnen wir der Transformation A die Matrix $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Determinante $D = \sin^3 \alpha$ zu, so erhalten wir

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos\alpha^* \\ 0 & \sin\alpha^* & 0 \\ \sin\alpha^* & 0 & 1 \end{bmatrix} D^{-1}$$

mit $\alpha^* = \pi - \alpha$.

Betrachten wir $A(\alpha_1)$, $A(\alpha_2)$, so erhalten wir für die zusammengesetzte Transformation $A(\alpha_1)$, $A(\alpha_2)$ die Transformation $A(\alpha_3)$ mit

$$\cos\alpha_3 = \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{1 + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{\sin\alpha_1 \; \sin\alpha_2}{1 + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}.$$

Wir haben also eine Gruppe vor uns. Setzen wir $\sin\alpha = \tan\beta$, so erhalten wir

$$\tan\beta_3 = \frac{\tan\beta_1 + \tan\beta_2}{1 + \tan\beta_1 \tan\beta_2},$$

also

$$\beta_3 = \beta_1 + \beta_2.$$

Im hyperbolischen Fall (**) ist Sin α durch tg β zu ersetzen.

Es liegt nahe, gleichverteilte Folgen (α_N), insbesondere solche, die zu pythagoräischen Tripel führen, und die zugehörigen Transformationen zu studieren, vgl. zu diesem Gegenstand auch §4. Wir wollen in einer anderen Arbeit darauf näher eingehen.

Interessant ist die verkürzte Transformation

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix},$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix},$$

mit Determinante $1 - \cos^2\alpha$ bzw. $1 - \cos^2\alpha$. Im zweiten (hyperbolischen) Fall wird durch die inverse Abbildung der Kreis $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$ in $\xi^2 - \eta^2 = 1$ transformiert.

4

Wir führen nun auf §3 (9) und (10), welche wir jetzt in der Form schreiben,

$$\bar{x} = a(\cos\alpha + \cos E) \tag{1}$$

$$\bar{y} = a \sin\alpha \sin E \tag{2}$$

$$\bar{z} = 0 \tag{3}$$

eine Drehung D durch, welche wir als Produkt

$$D = D_1 D_2 D_3 \tag{4}$$

schreiben, wo

$$D_1 = \begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \cos i & 0 & \sin i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin i & 0 & \cos i \end{bmatrix} \tag{6}$$

(i Inklination),

$$D_3 = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

ist, so erhalten wir

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Es ist

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = a^2(1 + \cos\alpha\cos E)^2 \tag{9}$$

Es wird weiter

$$\vec{V} = \dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

wo

$$\vec{\bar{v}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, 0)$$

in §3 (12) angegeben ist.

Weiters besitzt das vektorielle Produkt

$$[\vec{X}, \vec{V}] = [\vec{X}, \dot{\vec{X}}] = ([Y\dot{Z}], [Z\dot{X}], [X\dot{Y}])$$

die Komponenten

$$(\cos\Omega \sin i,\ \sin\Omega \sin i,\ \cos i)[\bar{x}, \dot{\bar{x}}], \tag{11}$$

wo $[\bar{x}, \dot{\bar{x}}]$ in Formel §3 (15) gegeben ist. Da Det $(X, Y, Z) = 0$ ist, so ist

$$[Y\dot{Z}]X + [Z\dot{X}]Y + [X\dot{Y}]Z = 0,$$

also liegen X, Y, Z in der Ebene

$$\cos\Omega \sin iX + \sin\Omega \sin iY + \cos iZ = 0. \tag{12}$$

Schneiden wir diese Ebene mit $Z = 0$, so erhalten wir für die Schnittgerade (aufsteigender Knoten)

$$\frac{X}{Y} = -\mathrm{tg}\,\Omega \tag{$*$}$$

und, wie aus (11) folgt

$$[Y\dot{Z}]^2 + [Z\dot{X}]^2 + [X\dot{Y}]^2 = a^2\omega^2 \sin^2\alpha. \tag{13}$$

Wir erhalten weiter die Gleichung (nach §3 (29))

$$\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = \frac{K\vec{X}}{r^3}. \tag{14}$$

Wir können aus der Drehung D neue Drehungen

$$D(k, l, m) = D_1^k D_2^l D_3^m$$

erhalten, wo jetzt statt Ω, i, γ $k\Omega$, li, $m\gamma$ steht. Wählen wir Ω, i, γ als irrationale Zahlen, welche mod 1 linear unabhängig sind, so können wir, wenn wir die ganzen Zahlen k, l, m passend wählen, jede beliebige Drehung beliebig genau approximieren. Wählen wir noch dazu eine gleichverteilte Folge (φ_k) bzw. (ε_k), so können wir, wenn wir ω als fest und damit a als fest annehmen, jede Anfangslage des Systems beliebig approximieren.

Es bleibt noch a festzulegen. Wir nehmen einen Punkt (x_0, y_0, y_0) als Anfangsbedingung. Wir wählen die Koordinaten dieses Punktes in fol-

gender Weise: Es seien α, γ zwei Zahlen in $Q(i)$, also zwei verschiedene komplexe rationale Zahlen α und γ und es sei

$$x_0 + iy_0 = \alpha^2 - \gamma^2 \text{ und } z_0 = \alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma,$$

dann ist

$$a = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = |\alpha|^2 + |\gamma|^2 > 0$$

und eine rationale Zahl.

Wenn α oder γ gleich Null ist, so ist $z_0 = 0$ und der Punkt liegt in der Ebene.

Haben wir mehrere Planeten, sagen wir s Planeten, so wählen wir s Paare von Zahlen α_j, γ_j, wobei die

$$a_j = |\alpha_j|^2 + |\gamma_j|^2$$

verschieden sind.

Damit sind auch die ω_j^2 gegeben. Ob wir dadurch auch die Folge von Titus-Bode erhalten, möge bis auf weiteres dahingestellt werden.[2]

Natürlich können die Folgen auch zu einer beliebigen Dichte gleichverteilt sein.

Wenn wir nun auf die Dichte Eins spezialisieren, erscheint es angenehm z.B. solche Folgen zu nehmen, für die $\varepsilon = \cos\alpha$, $\varepsilon^* = \sin\alpha$ rationale Zahlen sind, d.h. pythagoräische Tripel vorliegen. Das gilt auch für

$$\cos\frac{E}{2} = \cos(\omega t + \varphi_j) = \cos\varphi_j \cos\omega t + \sin\varphi_j \sin\omega t,$$

da ja

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

war.

Mit pythagoräischen Tripeln habe ich mich schon früher beschäftigt, so in meiner Arbeit ([1]) und in der Arbeit ([3]).

[2]Dieses Gesetz, welches vielleicht nur approximativ gültig ist, hat stets Interesse auf sich gezogen. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit hat schon in seiner Jugend den Versuch gemacht, durch Interpolation der vorliegenden Daten, ein solches Gesetz zu finden. Es war wohl C.F. von Weizäcker der erste, der eine Herleitung dieses Gesetzes versucht hat (Z. f. Astrophysik 22 (1944)). Der Verfasser plant, die Gedankengänge von Weizäckers mit den vorliegenden Gedanken zu kombinieren.

Wir betrachten hier s Primzahlen $p_1, \ldots, p_s$ von der Gestalt $4k+1$, z.B. für $s=6$ die Primzahlen 5, 13, 17, 29, 37, 41 (Zahlenmystik).

Jede solche Primzahl p_j läßt sich im Gaußschen Zahlkörper $Q(\sqrt{-1})$ eindeutig schreiben

$$p_j = \pi_j \bar{\pi}_j,$$

wo π_j und $\bar{\pi}_j$ Primzahlen in $Q(\sqrt{-1})$ sind. Wir definieren nun Zahlen χ_j durch

$$\frac{\pi_j}{|\bar{\pi}_j|} = e^{i\chi_j}$$

für $j=1, \quad ., s$. Es sind diese s Zahlen dividiert durch 2π modulo 1 linear unabhängig. Es ist also die Folge ($k=1, \ldots$)

$$\left(\frac{k\chi_1}{2\pi}, \quad , \frac{k\chi_s}{2\pi} \right)$$

im Einheitswürfel E^s gleichverteilt mit einer Diskrepanz (K absolute Konstante)

$$D_N^s \leq \frac{K(\log N)^s}{N^{1/s}}.$$

Es ist (L natürliche Zahl)

$$e^{\sqrt{-1}L\chi_j} = \left(\frac{\pi_j}{|\pi_j|} \right)^L$$

und wenn L gerade $2g$ ist und

$$\pi_j = a_j + \sqrt{-1} b_j$$

(a_j, b_j natürliche Zahlen) geschrieben wird, so wird

$$\pi_j^2 = a_j^2 - b_j^2 + 2\sqrt{-1} a_j b_j$$
$$|\pi_j^2| = a_j^2 - b_j^2,$$

so ist

$$\cos 2g\varphi_j = \left(\frac{a_j^2 - b_j^2}{a_j^2 + b_j^2} \right)^g = \frac{a_{jg}^2 - b_{jg}^2}{a_{jg}^2 + b_{jg}^2}$$
$$\sin 2g\varphi_j = \left(\frac{2a_j b_j}{a_j^2 + b_j^2} \right)^g = \frac{2a_{jg} b_{jg}}{a_{jg}^2 + b_{jg}^2}.$$

Wir wollen Ω, i, γ in der Formel für die Drehung D zusammen behandeln.

Die zugehörigen Primzahlen, welche die zugehörigen pythagoräischen Tripel liefern, wollen wir mit p_1, p_2, p_3 bezeichnen, also z.B. 5, 13, 17. Dies gelingt so, daß wir die zugehörige unitäre Transformation

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

aufstellen, aus der dann in bekannter Weise die Darstellung von D folgt.

Diese Darstellung von D durch pythagoräische Tripel gestattet weitere Anwendungen, die hier nicht mehr behandelt werden sollen.

Wir setzen

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\pi_1\pi_2}{|\pi_1||\pi_2|}\frac{a_3}{|\pi_3|}, & a_{12} &= \frac{\bar{\pi}_1\pi_2}{|\pi_1||\pi_2|}\frac{b_3}{|\pi_3|} \\ a_{21} &= \frac{\pi_1\bar{\pi}_2}{|\pi_1||\pi_2|}\frac{b_3}{|\pi_3|}, & a_{22} &= \frac{\bar{\pi}_1\bar{\pi}_2}{|\pi_1||\pi_2|}\frac{a_3}{|\pi_3|}, \end{aligned} \tag{15}$$

also z.B. wenn wir das Tripel 5, 13, 17 nehmen, so wäre

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 1 + 2\sqrt{-1} \\ \pi_2 &= 3 + 2\sqrt{-1} \\ \pi_3 &= 1 + 4\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1.$$

Weiters setzen wir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{i}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) = (a_1a_2 - b_1b_2)a_3/a^2 \\ a_1 &= \frac{i}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) = (a_1a_2 + b_1b_2)b_3/a^2 \\ a_2 &= -\frac{i}{2}(\alpha_{12} - \alpha_{21}) = (b_1a_2 - b_2a_1)b_3/a^2 \\ a_3 &= -\frac{i}{2}(\alpha_{11} - \alpha_{22}) = (a_1b_2 + a_2b_1)a_3/a^2, \end{aligned} \tag{16}$$

wo

$$a^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2).$$

Zu (1) gehört die unitäre Transformation

$$Z' = \frac{\alpha_{11} Z + \alpha_{12}}{\alpha_{21} Z + \alpha_{22}}, \tag{17}$$

also explizit

$$Z' = \frac{\pi_2}{\bar{\pi}_2} \frac{\pi_1 a_3 Z + i \bar{\pi}_j b_3}{i \pi_1 b_3 Z + \bar{\pi}_1 a_3}. \tag{18}$$

Zu (2) gehört das Quaternion

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2) a_3 e_0 + (a_1 a_2 + b_1 b_2) b_3 e_1 \\ + (b_1 a_2 - b_2 a_1) e_2 + (a_2 b_1 + b_1 a_2) a_3 e_3,$$

wo e_0, e_1, e_2, e_3 die bekannten Quaternioneneinheiten sind.

Die Transformation (17) schreiben wir kurz

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \pi_2 a_3 & i \bar{\pi}_1 \pi_2 b_3 \\ i \pi_1 \bar{\pi}_2 b_3 & \bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2 a_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Wir erhalten für die Drehung D die folgende Darstellung

$$D = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix},$$

wobei

$$C_{11} = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$$

$$C_{22} = a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2$$

$$C_{33} = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2$$

$$C_{23} = 2(a_2 a_3 - a_0 a_1) \quad C_{32} = 2(a_2 a_3 + a_0 a_1)$$

$$C_{31} = 2(a_3 a_1 - a_0 a_2) \quad C_{13} = 2(a_3 a_1 + a_0 a_2)$$

$$C_{12} = 2(a_1 a_2 - a_0 a_3) \quad C_{21} = 2(a_1 a_2 + a_0 a_3).$$

Man kann jetzt für (16) einsetzen. Eine ausführliche Darstellung findet sich in der Arbeit des Autors [4].

Man kann damit auch sphärische Dreiecke berechnen, dies soll an anderer Stelle ausgeführt werden.

Anhang zu §4

Es liege eine Folge (x_n) modulo 1 vor, welche zur Dichte ρ mit Diskrepanz D_N^ρ gleichverteilt ist. Es sei L eine natürliche Zahl, dann betrachten wir nun die Gleichverteilung (wenn vorhanden) der Folge

$$\frac{1}{x_n^L} - \left[\frac{1}{x_n^L}\right] \qquad (*)$$

Bekanntlich gilt für jede Funktion F von beschränkter Variation $V(F)$ im Einheitsintervall E

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F(x_k) - \int_0^1 F(x)\rho(x)dx\right| \leq V(F)D_N^\rho.$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, welches wir erst später wählen werden. Es sei dann für $\varepsilon < x < 1$

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x^L} - \left[\frac{1}{x^L}\right]\right)$$

und

$$F(x) = \frac{1}{\varepsilon^{L+1}}$$

für $0 < x < \varepsilon$. Dabei sei f periodisch mit der Periode 1 und beschränkter Variation. Wenden wir die obige Formel an, so haben wir zunächst das Integral

$$J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 F(x)\rho(x)dx$$

zu studieren. Es ist

$$J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \rho(x) f\left(\frac{1}{x^L}\right)dx.$$

Wir setzen $x^{-L} = \xi$ als neue Variable, dann haben wir

$$J(\varepsilon) = \frac{1}{L}\int_1^{1/\varepsilon} \rho\left(\xi^{-1/L}\right)\xi^{-\left(1/L+1\right)}f(\xi)d\xi$$
$$= \frac{1}{L}\sum_k{}^* \int_k^{k+1} \rho\left(\xi^{-1/L}\right)\xi^{-\left(1/L+1\right)}f(\xi)d\xi$$
$$= \frac{1}{L}\sum{}^* \int_0^1 \rho\left((\xi+k)^{-1/L}\right)f(\xi)(\xi+k)^{-\left(1/L+1\right)}d\xi.$$

Setzen wir

$$\rho_1(\xi) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{\infty} \rho\left((\xi+k)^{-1/L}\right)(\xi+k)^{-\left(1/L+1\right)},$$

so ist also

$$J(\varepsilon) = \int_0^1 f(\xi)\rho_1(\xi)d\xi.$$

Wir haben dabei einen Fehler gemacht, da ja k nicht bis ins Unendliche geht. Da aber ρ beschränkt ist, $0 \leq \rho \leq A$ und da $\sum_{k=1}^{\infty}(\xi+k)^{-(1/L+1)}$ konvergent ist, so ist der Fehler $\leq \varepsilon AM$, wo $M(f)$ eine obere Schranke für f ist.

Wir wollen nun noch $V(f)$ abschätzen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß f sogar stetig differenzierbar ist, dann ist im Intervall $\varepsilon < x \leq 1$

$$f'\left(\frac{1}{x^L}\right) = Lf'\left(\frac{1}{\varepsilon^L}\right)\frac{1}{x^{L+1}},$$

also wenn M_1 eine obere Schranke von f' ist,

$$\left|f'\left(\frac{1}{x^L}\right)\right| \leq M_1\frac{1}{\varepsilon^{L+1}},$$

Wir haben also insgesamt

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{x_n \geq \varepsilon} f\left(\frac{1}{x_n^L} - \left[\frac{1}{x_n^L}\right]\right) - \int_0^1 f(x)\rho_1(x)dx\right|$$
$$\leq D_N^\rho\left(\frac{M_1}{\varepsilon^{L+1}} + A\right) + \varepsilon(1+MA),$$

da ja

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{x_n < \varepsilon} 1 - \int_0^\varepsilon \rho(x)dx\right| \leq \varepsilon A D_N^\rho.$$

Wählen wir nun $\varepsilon_N = D_N^{(1/(L+2))}$, so erhalten wir

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{\varepsilon_N \leq x_n} f\left(\frac{1}{x_n^L} - \left[\frac{1}{x_n^L}\right]\right) - \int_0^1 f(x)\rho_1(x)dx\right| \leq C(D_N^\rho)^{(1/(L+2))}$$

Der Fall $L=1$ wurde schon (ohne Restabschätzung) von Dirichlet behandelt (man vgl. meine Arbeit [3]), wo die Abschätzung auf anderem Weg gefunden wurde).

Analog behandeln wir den Fall

$$\frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2}x_n\right)^L} - \left[\frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2}x_n\right)^L}\right]$$

Hier setzt man

$$\frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2}x_n\right)^L} = \xi.$$

Die neue Dichte wird

$$\rho_1(\xi) = \frac{2}{\pi^L}\sum_k \frac{\rho\left(\frac{2}{\pi}\arcsin\,(\xi+k)^{1/L}\right)}{\sqrt{1-(\xi+k)^{-(2/L)}}}\frac{d\xi}{(\xi+k)^{1+1/L}}.$$

5

Es ist bemerkenswert, daß ein solcher Zusammenhang wie in §1 auch bei dem Friedmannschen Modell des Kosmos auftritt. Es handelt sich, wenn R der Weltradius ist, im elliptischen Fall um die Differentialgleichung $(\omega > 0)$

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = 2R\frac{d^2R}{dt^2} + \omega^2 R, \tag{1}$$

wobei τ die Eigenzeit ist, d.h. die Zeit, die durch eine vom Körper mitgeführte Uhr angezeigt wird, die in §1 fiktive Zeit genannt wurde. Die Zeit t wird wieder durch das Integral

$$t = \int R(\tau)d\tau \tag{2}$$

gegeben. Man nimmt üblicherweise $\omega = 1$. Wir denken uns die Eigenzeit durch $\omega\tau$ gegeben. Wir differenzieren nun (1) nach τ (wir wollen jetzt die Ableitungen τ durch einen. Punkt andeuten, z.B. statt $\frac{dR}{d\tau}$ kurz $\dot{R}$ schreiben, dagegen wollen wir die Ableitungen nach der Zeit t in der üblichen Form R' statt $\frac{dR}{dt}$ schreiben.

Wir differenzieren nun (1) nach τ und erhalten, da sich bei der Differentiation die Glieder $\dot{R}\ddot{R}$ wegheben,

$$R + \omega^2\dot{R} = 0. \tag{3}$$

Wenn wir $\dot{R} = v$ setzen, so erhalten wir für v die Differentialgleichung

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0. \tag{3'}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$v = A \cos \tau + B \sin \tau = C \sin(\omega\tau + \varphi). \tag{4}$$

Integrieren wir (4), so erhalten wir, wenn wir

$$\frac{C}{\omega} = K \tag{5}$$

setzen,

$$R = \int v d\tau = -K \cos E + L, \tag{6}$$

wo $E = \omega\tau + \varphi$ ist.

Aus (4), (5) und (1) folgt nun

$$\ddot{R} = \dot{v} = \omega^2 K \cos E = \omega^2 K \cos E. \tag{7}$$

Setzen wir (1) ein, so erhalten wir nach (4), (5) und (7)

$$\begin{aligned} K^2\omega^2 &= (L - K \cos E)\omega^2(L - K \cos E) + 2\omega^2 K \cos E \\ &= \omega^2(L - K \cos E)(L + K \cos E). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$K^2 \sin^2 E = L^2 - K^2 \cos^2 E,$$

also

$$K^2 = L^2, \text{ also } L = \pm K.$$

Da $R \geq 0$ sein soll, so ist

$$R = K(1 - \cos E) = 2K \sin^2 \frac{E}{2}. \tag{8}$$

Es wird

$$R' = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\tau} \Big/ \frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\omega \sin E}{1 - \cos E},$$

also

$$R' = \omega \operatorname{ctg} \frac{E}{2}. \tag{9}$$

Es ist nun

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{2\omega^2}{R} = -\omega^2\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{E}{2} - \frac{1}{\sin^2 \frac{E}{2}}\right) = -\omega^2 \tag{10}$$

(10) nennt man die Friedmanngleichung. Wir differenzieren nun und erhalten

$$R'R'' + \frac{2\omega^2}{R^2} R' = 0,$$

also an allen Stellen, wo

$$R' \neq 0$$

ist, erhalten wir

$$R'' = -\frac{2\omega^2}{R^2},$$

also folgt aus (10)

$$RR'' = -\frac{2\omega^2}{R} = -\omega^2 - R'^2,$$

also folgt aus (9) und (10)

$$\begin{aligned} \frac{RR''}{R'^2} &= -\frac{\omega^2}{R'^2} - 1 \\ &= -\omega^2\left(\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \frac{E}{2}} + 1\right) = -\frac{\omega^2}{\sin^2 \frac{E}{2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Für die Hubble-Konstante erhalten wir

$$H = \frac{\dot{R}}{R^2} = -\frac{\omega \sin E}{K(1-\cos E)^2} = \frac{\omega \cos \frac{E}{2}}{2K \sin^4 \frac{E}{2}}. \tag{12}$$

Wir benötigen nun noch die Gleichung für die Dichte ρ nach der ersten Feldgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{R^4}\left(\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + \omega^2 R^2\right) \\ &= \frac{\omega^2}{R^4}\left(\left(\operatorname{ctg}\frac{E}{2}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{E}{2}\right)^2\right) \\ &= \omega^2\left(\frac{\sin^2 \frac{E}{2}\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{E}{2} + \sin^2 \frac{E}{2}\right)}{\sin^8 \frac{E}{2}}\right) = \frac{\omega^2}{\sin^6 \frac{E}{2}}. \end{aligned}$$

Es wird also die Dichte

$$\rho(E, \varphi) = \frac{\omega^2}{\sin^6 \frac{E}{2}}.$$

Es bleibt noch t zu berechnen

$$t = \int_0^\tau R(\tau)d\tau = K\left(\tau - \frac{\sin(\omega\tau + \varphi)}{\omega}\right) + C.$$

Wir erhalten noch eine Keplersche Gleichung.

Betrachten wir jetzt den hyperbolischen Fall

$$\dot{R}^2 = 2RR'' - \omega^2 R^2, \tag{13}$$

so erhalten wir wieder mit $v = \dot{R}$

$$\ddot{v} - \omega^2 v = 0. \tag{14}$$

Es wird also

$$v = \omega K \sin E$$

und

$$R = K\left(\cos E - 1\right) = 2K \sin^2 \frac{E}{2}$$

und

$$\frac{RR''}{R'^2} = \frac{\omega^2}{\sin^2 \frac{E}{2}}$$

und die Hubble-Konstante

$$H = \frac{\omega \sin E}{K(\cos E - 1)^2} = \frac{\omega \cos \frac{E}{2}}{2K \sin^4 \frac{E}{2}}. \tag{15}$$

Für die Dichte erhalten wir

$$\rho = \frac{\omega^2}{\sin^6 \frac{E}{2}}. \tag{16}$$

Es wird die zugehörige Keplersche Gleichung

$$t = K\left(\frac{\sin(\omega\tau + \varphi)}{\omega} - \tau\right). \tag{17}$$

Wir können wie in §1 vorgehen und s Welten mit den Eigenzeiten

$$\omega_1\tau, \qquad , \omega_s\tau$$

mit

$$\omega_1^2 + \qquad + \omega_s^2 = E$$

und Anfangsbedingungen gleichverteilter Folgen $(\varphi_1^k, \ldots, \varphi_s^k)$ mit Dichte ρ und Diskrepanz D_N^ρ betrachten und erhalten so ein Modell für die Vielweltentheorie von D. W. Sciama.

Wir wollen zum Schluß noch auf die Keplergleichung, die wir schon mehrmals zu betrachten hatten,

$$t = a\left(\tau - \frac{\sin(\omega\tau + \varphi)}{\omega}\right) \tag{17'}$$

eingehen, die wir so schreiben können

$$\frac{1}{a}(\omega t + \varphi) = E - \sin E, \tag{17''}$$

dabei haben wir, wie schon früher $E = \omega\tau + \varphi$ gesetzt.

Bekanntlich wird die Gleichung

$$M = E - \varepsilon \sin E$$

im bezug auf E als Funktion von M durch die Reihe

$$E(M) - M = \sum_{L=1}^{\infty} \frac{1}{L} J_L(\varepsilon L) \sin LM \tag{$*$}$$

gelöst, wobei J_L die ganzzahligen Besselfunktionen sind. Die Reihe ist für $0 < \varepsilon \leq 1$ absolut konvergent. Für $\varepsilon < 1$ ist dies leicht einzusehen, der Fall $\varepsilon = 1$ ist schwieriger. Es gilt zwar eine Aussage für $J_L(L)$, eine asymptotische Formel, die ziemlich intrikat ist. Wir brauchen aber eine Abschätzung nach oben. Dazu gehen wir von der Formel

$$J_L(L) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos L(\alpha - \sin \alpha) d\alpha \tag{18}$$

aus. Wir zerlegen das Integral in zwei Teile. Der erste Teil sei für ein $\delta > 0$

$$A = \int_\delta^{\pi-\delta} \cos L(\alpha - \sin \alpha) d\alpha$$

und der zweite Teil sei

$$B = \int_0^\delta \int_{\pi-\delta}^\pi$$

Es ist unmittelbar klar, daß

$$|B| \leq 2\delta$$

ist.

Wenn wir den Integrand in A in der Form schreiben

$$\frac{(1-\cos\alpha)\cos L(\alpha-\sin\alpha)}{1-\cos\alpha},$$

so liefert partielle Integration nach α sofort

$$B=\frac{\sin L(\alpha-\sin\alpha)}{L(1-\cos\alpha)}\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{E}\int_{\delta}^{\pi-\delta}\sin(\alpha-\sin\alpha)\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\cos\alpha}\right)d\alpha.$$

Es ist nun zunächst der ausintegrierte Teil zu betrachten. Es ist

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\geq 2\sin^2\frac{\delta}{2}\geq\frac{\delta^2}{2},$$

also ist er höchstens

$$\frac{2}{L\delta^2}.$$

Das Integral ist

$$\leq\frac{1}{L}\int_{\delta}^{\pi-\delta}\left|\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\cos\alpha}\right)\right|d\alpha.$$

Nun ist die Ableitung nach α im Integrationsintervall positiv, wir können also integrieren und erhalten die gleiche Abschätzung wie vorher. Es wird dann

$$|J_L(L)|\leq 4\delta+\frac{8}{L\delta^2}.$$

Wählen wir $\delta^3=1/\mathrm{L}$, dann ist

$$|J_L(L)|\leq\frac{12}{L^{\frac{1}{3}}}.$$

Es wird also

$$\left|\sum_{L=m}^{\infty}\frac{J_L(L)}{L}\right|\leq 20\sum_{L=m}^{\infty}L^{-\frac{4}{3}}\leq 40m^{-\frac{1}{3}}.$$

Wir erhalten also

$$E=\omega\tau+\varphi-\frac{1}{\omega}\sum_{L=1}^{\infty}\frac{J_L(L)}{L}\sin L(\omega t+\varphi). \tag{19}$$

Brechen wir beim m-ten Glied ab, so erhalten wir

$$E = \omega\tau + \varphi - \frac{1}{\omega}\sum_{L=1}^{m}\frac{J_L(L)}{L}\sin L(\omega t + \varphi) + \frac{\vartheta}{m^{\frac{1}{3}}} \qquad (19')$$

$$(|\vartheta| \leq 40).$$

Wenden wir auf $J_L(L)$ eine Quadraturformel mit Hilfe einer gleichverteilten Folge (α_k) und Diskrepanz D_N^* an, so erhalten wir

$$J_L(L) = S_m(L) + F, \qquad (20)$$

wo

$$S_m(L) = \frac{1}{m}\pi\sum_{k=1}^{m}\cos(L(\alpha_k - \sin\alpha_k)) \qquad (21)$$

und

$$|F| \leq LD_N^* \qquad (22)$$

ist, da ja die Variation $V(J_L) \leq L$.

Setzen wir

$$E_m^* = 2(\omega t + \varphi) - \frac{2}{\omega}\sum_{L=1}^{m}\frac{S_m(L)}{L}\sin L(\omega t + \varphi), \qquad (23)$$

so ist

$$E = E_m^* + F_1, \qquad (24)$$

wo

$$|F_1| \leq 40\left(m^{-\frac{1}{3}} + mD_N^*\right).$$

Wählen wir nun

$$m_0 = \left[\left(D_N^*\right)^{\frac{3}{4}}\right], \qquad (25)$$

so gilt für den Fehler F_2

$$|F_2| \leq 60\left(D_N^*\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad (26)$$

also haben wir

$$E = E_{m_0}^* + \vartheta 60\left(D_N^*\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Wollen wir z.B. $r(t)$ aus §3 berechnen, so erhalten wir

$$r(t) = a(1 + \cos\alpha \cos E) = 1 + \cos\alpha \cos E^* + F^*$$

mit

$$F^* \leq |\cos E - \cos E^*| \leq |E - E^*| \leq \left(D_N^*\right)^{\frac{1}{4}}$$

Wir haben in §1 und [2] §7, indirekt aber in beiden Arbeiten, immer wieder Systeme $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s$ betrachtet, wobei die Frequenzen $\omega_1, \ldots, \omega_s$, welche eine Harmonie im Sinne von Pythagoras bzw. Kepler bilden. Diese Systeme werden durch Anfangsbedingungen, welche die Gestalt einer s-dimensionalen Folge haben, gleichverteilt bezüglich einer Dichte ρ, welche ein Produkt von Dichten $\rho_1, \ldots, \rho_s$ im bezug auf $\Sigma_1, \ \ ., \Sigma_s$ ist. Die Bestandteile des Systems $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s$ stehen untereinander in keiner Wechselwirkung. Wir denken uns nämlich nach einer Idee von A. Einstein (in [8], S. 820 – 825), welche J. von Neumann in seinem Buch [5] abstrakt formuliert, jedes Σ_j in einem Kasten (in einer Schachtel) K_j eingeschlossen, welcher gegenüber äußeren Einwirkungen undurchlässig ist. Alle K_j werden in einem großen Kasten $\bar{K}$ eingeschlossen. Wir können diese Σ_j als Moleküle eines Gases in $\bar{K}$ auffassen, so wie dies in der Physik bei der Mischung chemisch differenter Gase üblich ist, und dann die Gesetze der Thermodynamik anwenden. Übrigens können wir alle diese verschiedenen Systeme, welche wir in [2] §7 und §1 betrachtet haben, in einem Superkasten $\bar{\bar{K}}$ zusammenfassen.

Kehren wir zu unserem System $\Sigma_1, . \ \ ., \Sigma_s$ zurück und definieren wir als Energie des Systems

$$E = \omega_1^2 + \quad + \omega_s^2$$

und als Entropie S, welche wir als Mengenfunktion auf $\Sigma_1 \times \quad \times \Sigma_s$ auffassen, folgendermaßen:
Sind $A_1, \ldots, A_s$ quadrierbare Mengen in $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s$, so sei

$$S(A_1, . \quad , A_s) = \sum_{j=1}^{s} \lg \int_{A_j} \rho_j(x_j) dx_j .$$

Es ist also

$$S(A_1, .. \ \ , A_s) = \log \int_{A_1} \quad \int_{A_s} \rho_1(x_1) \rho_s(x_s) dx_1 \quad \cdot dx_s .$$

Wir können $\bar{K}$ in ein Wärmebad mit Temperatur T geben, die freie Energie $U = E - TS$ und dann die Gesetze der Thermodynamik anwenden.

So sieht die Gleichverteilung des „Staubes“ im Friedmannmodell aus

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F(r_k(t) \cos \Phi_k \cos \lambda_k, r_k(t) \cos \Phi_k \sin \lambda_k, r_k \sin \Phi_k) - \right.$$
$$\left. - \iint F(r \cos \varphi \cos \lambda, r \cos \varphi \sin \lambda, r \sin \Phi) r^2 dr \sin \Phi \right| d\Phi d\lambda$$
$$\leq V(F) D_N^6.$$

F ist von beschränkter Variation.

Anmerkungen

Anmerkung 1 zu §1 Seite 14

Betrachten wir noch den Fall $\omega = 0$, also die Gleichung

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u = a(\tau + \psi)$$

und setzen

$$x = u^2 - 1 = (a(\tau + \psi))^2 - 1$$
$$y = 2u = 2a(\tau + \psi),$$

dann wird

$$r = u^2 + 1 = (a(\tau + \psi))^2 + 1.$$

Es wird

$$t = \int r d\tau = \frac{a^2(\tau + \psi)^3}{3} + \tau + \psi + C.$$

Wir haben also eine Parabel

$$y^2 = 4(x + 1).$$

Es wird $\dot{x} = 2a^2(\tau + \psi)$, $\quad y = 2a$, $\quad \vec{v} = \frac{(\dot{x}, \dot{y})}{r}$, also

$$v^2 = 4a^2$$

Es wird

$$\frac{v^2}{2} - \frac{K}{r} = 0,$$

wenn wir $K = 2a^2$ nehmen.

Wir setzen

$$\cos\Phi = \frac{u^2-1}{u^2+1}, \qquad \sin\Phi = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$1+\cos\Phi = \frac{2u^2}{u^2+1}$$

$$1-\cos\Phi = \frac{2}{u^2+1},$$

also

$$r = \frac{2}{1-\cos\Phi}.$$

Wir können die Keplergleichung explizit lösen. Wir haben die Gleichung

$$w^3 + 3w - 3t = 0$$

zu lösen. Die Diskriminante dieser Gleichung ist

$$-4\cdot 3^3 - 27t^2 < 0,$$

also nach Cardano

$$w = \sqrt[3]{\frac{t}{2} + \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^3 + 1}} + \sqrt[3]{-\frac{t}{2} + \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^3 + 1}}.$$

Setzen wir

$$\frac{t}{2} + \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^3 + 1} = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\frac{t}{2} - \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^3 + 1} = -\operatorname{ctg}\alpha,$$

so wird

$$w = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Anmerkung 2

Eine Bemerkung zur Energiegleichung, siehe z.B. §1 Formel (6),

$$\frac{v^2}{2} - \frac{2\omega^2}{\cos^2 E} = -2\omega^2,$$

die eng mit der Schwingungsgleichung $\ddot{u}+\omega^2 u=0$ mit $E=\omega\tau+\varphi$ zusammenhängt. Wir können $\nu=\omega^2$ als Frequenz und $\lambda=\mathrm{ctg}(\omega\tau+\varphi)$ im Sinne von Broglie als Wellenlänge bezeichnen.

Setzen wir $S=\log\cos E+C$, wo C eine additive Konstante ist. Wir können dies auch schreiben

$$S=\log A\cos E,$$

so ist

$$\frac{\partial S}{\partial\tau}=\omega\frac{\sin E}{\cos E}=\nu$$

und die Energiegleichung schreibt sich

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial\tau}\right)^2-\frac{K}{r}=0,$$

wo $K=2\omega^2 a$ und $r=a\cos^2 E$ ist.

Führen wir eine zusätzliche Variable α ein und setzen

$$W=-\omega^2\alpha+S(\tau)=-\nu\alpha+S(\tau),$$

so erhalten wir

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha}+\left(\frac{\partial W}{\partial\tau}\right)^2-\frac{K}{r}=0.$$

Es ist

$$W(\alpha)=\int_0^\alpha\left(\frac{\nu^2}{2}-\frac{K}{r}\right)d\tau$$

im Sinne der Hamilton-Jacobischen Gleichung.

Setzen wir mit Schrödinger, der diesen Weg später nicht mehr weiterverfolgt hat,

$$\psi=K\cos E,$$

so wird

$$\frac{\partial S}{\partial\tau}=\frac{\dot\psi}{\psi},$$

dann wird die Energiegleichung

$$\dot\psi^2-2\omega^2\mathrm{tg}^2 E\psi^2=0.$$

Betrachten wir die Funktion $F = \dot{\psi}^2 - 2\omega^2 \mathrm{tg}^2 E\psi^2$ als Funktion ψ, $\dot{\psi}$, τ und stellen die zugehörige Eulersche Gleichung auf, so erhalten wir für die Extremale Y die Gleichung

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2} + 2\omega^2 \mathrm{tg}^2 E\psi(\tau) = 0,$$

für die man noch Randbedingungen vorschreiben kann. Wir erhalten eine Hillsche Gleichung.

Anmerkung 3 zu §3 und §4

Die Drehungen der Erde um ihre Achse sind ein Beispiel für eine Statistik von Drehungen. Nehmen wir in nullter Näherung für die Erde an, sie wäre ein kräftefreier Drehkreisel, dann können wir die Eulerschen Gleichungen (A, B, C die Trägheitsmomente der Erde) aufschreiben

$$A\frac{dp}{dt} + (B - C)rq = 0, \quad B\frac{dq}{dt} + (C - A)rp = 0$$

und

$$C\frac{dr}{dt} + (A - B)pq = 0.$$

Nehmen wir weiter an, daß $A = B$ ist (auch dies ist näherungsweise erfüllt), so folgt aus der letzten Gleichung, daß $r(t)$ eine Konstante, sagen wir r_0, ist. Setzen wir

$$\mu = \frac{A - C}{A}$$

und

$$2\pi\lambda = \mu r_0,$$

so erhalten wir aus den beiden ersten Gleichungen

$$\frac{dp}{dt} + 2\pi\lambda q = 0, \quad \frac{dq}{dt} - 2\pi\lambda p = 0.$$

Wir kommen also wieder auf die Schwingungsgleichung zurück und erhalten als Lösung

$$p(t, a, \varphi) = a \sin 2\pi(\lambda t + \varphi),$$
$$q(t, a, \varphi) = a \cos 2\pi(\lambda t + \varphi),$$

wo a und φ Integrationskonstante sind.

Es ist

$$p^2 + q^2 = a^2$$

Wir nehmen a als positiv an. Es ist

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = a^2 + r_0^2$$

die Energiegleichung.

Wir nehmen nun eine Folge (a_k, φ_k) im Einheitsquadrat E^2 gleichverteilt mit der Diskrepanz $D_N^{(2)}$ an.

Es sei g eine Funktion von beschränkter Variation $V(g)$ in E^2 und wir setzen

$$G(a, \varphi) = g(a \cos 2\pi\varphi, a \sin 2\pi\varphi).$$

Es sei

$$\lambda_N(g) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} G(a_k \cos 2\pi\varphi_k, a_k \sin 2\pi\varphi).$$

Es ist

$$\lambda_N(G) = J + \vartheta V(G) D_N,$$

wo

$$J = \int_{E^2} G(a, \varphi) da d\varphi$$

$(|\vartheta| \leq 1)$. Wir setzen $a = \alpha^2$ $(\alpha > 0)$, also ist

$$J = 2 \int_{E^2} G(\alpha^2, \varphi) \alpha \, d\alpha d\varphi.$$

Setzen wir

$$\xi = \alpha \cos 2\pi\varphi, \qquad \eta = \alpha \sin 2\pi\varphi,$$

so wird

$$J = \frac{2}{\pi} \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq 1} g(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Führen wir die Drehung

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' \cos 2\pi\lambda t + \eta' \sin 2\pi\lambda t \\ \eta &= -\eta' \sin 2\pi\lambda t + \eta' \cos 2\pi\lambda t \end{aligned} \qquad (*)$$

im Integral J durch, so erhalten wir

$$J = \iint_{\xi'^2+\eta'^2\leq 1} g(\xi' \cos 2\pi\lambda t + \eta' \sin 2\pi\lambda t, \\ - \xi' \sin 2\pi\lambda t + \eta' \cos 2\pi\lambda t) d\xi' d\eta'$$

Setzen wir

$$\xi' = \alpha \sin 2\pi\varphi, \quad \eta' = \alpha \sin 2\pi\varphi,$$

so erhalten wir

$$J = \int_{E^2} g(a \cos 2\pi(\lambda t + \varphi), a \sin 2\pi(\lambda t + \varphi) da d\varphi.$$

Wenn wir nun von J zu

$$G(p(t,a_k,\varphi_k),q(t,a_k,\varphi_k)) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(a_k \cos 2\pi(\lambda t - \varphi_k), a \sin 2\pi(\lambda t + \varphi_k))$$

zurückgehen, so erhalten wir

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G(p(t,a_k,\varphi_k), q(t,a_k,\varphi_k)) - \\ - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G(p(0,a_k,\varphi_k), q(0,a_k,\varphi_k)) \right| \leq 2\vartheta V(G) D_N.$$

So sieht bei uns der Liouvillesche Satz aus.

Nehmen wir an, daß g die Indikatorfunktion ι einer quadrierbaren Menge A mit der Schwankung $\sigma(A, D_N^{(1/3)})$ ist, so ändert sich nichts an der Überlegung. Es bleibt die Häufigkeit

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \iota(A, p(t,a_k,\varphi_k), q(t,a_k,\varphi_k))$$

gleich der Häufigkeit dieser Punkte $p(t, a_k, \varphi_k)$ zur Zeit $t = 0$ bis auf einen Fehler von der Größe $\sigma(A, D_N^{(1/3)})$.

Die Umlaufszeit

$$t = \frac{2\pi}{\mu r_0}$$

bleibt ungeändert.

Wir können die gleiche Methode auch auf die Planetenmodelle von Levi-Civita anwenden. Wir nehmen jetzt unter gleichen Voraussetzungen für g

$$G(a, \varphi) = g(a \sin^2 2\pi\varphi, \omega a \sin 2\pi\varphi)$$

($\omega > 0$). Es sei wieder

$$\lambda_N(G) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G(a_k, \varphi_k).$$

Wir führen wieder die Drehung (*) durch, allerdings schreiben wir τ statt t und wir erhalten ($\omega = 2\pi\lambda$)

$$J = \iint_{E^2} g((\alpha \cos 2\pi(\lambda\tau + \varphi))^2, \; \omega\alpha \sin 2\pi(\lambda\tau + \varphi))d\alpha d\varphi.$$

Jetzt kommt die Änderung: Wir setzen

$$r(\tau) = a(\cos(\omega\tau + 2\pi\varphi))^2$$

und

$$r(\tau)v(\tau) = \omega \sin(\omega\tau + 2\pi\varphi).$$

Es ist ($r(\tau) \leq a \leq 1$)

$$v(\tau) = \omega \operatorname{tg}(\omega\tau + 2\pi\varphi).$$

Wir setzen

$$r_k = a_k \cos 2\pi\varphi_k, \quad v_k = \omega \operatorname{tg}(\omega\tau + 2\pi\varphi_k).$$

Es ist

$$r_k^2(\omega_k^2 + v_k^2) = a_k^2\omega_k^2.$$

Wir erhalten also

$$J = \iint_{E^2} g(r(\tau, a, \varphi), r(\tau, a, \varphi), v(\tau, a, \varphi)dad\varphi$$

und der Liouvillesche Satz wird

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(r(\tau,a_k,\varphi_k),r(\tau,a_k,\varphi_k)v(\tau,a_k,\varphi_k) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(r_k,r_k v_k)\right| \leq 2V(G)D_N.$$

Dies bleibt natürlich richtig, wenn G nur quadratisch integrierbar ist. Es ist dann die Variation $V(G)$ durch die Schwankung $\sigma(g, D_N^{(1/3)})$ zu ersetzen.

Ist $\iota(K, R)$ die Indikatorfunktion eines Kreises vom Radius R in E^2 mit Mittelpunkt 0, so ist

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \iota(K, r_k, r_k v_k)$$

die Häufigkeit der Punkte $(r_k, r_k v_k)$, die zur fiktiven Zeit $t = v$ im Kreise K liegen und dann ist sie auch zur Zeit $\tau(t)$ bis auf einen Faktor, der von σ und D_N abhängt, die gleiche.

Wir haben stets in E^2: $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ gearbeitet. Alles geht analog, wenn wir ein anderes, z.B. ein größeres Rechteck, nehmen und wir können dies sofort auf E^2 zurückführen.

Nehmen wir an, es liegen mehrere Kreisel oder Planeten oder mehrere Oszillatoren vor, sagen wir s solcher Objekte, so haben wir s Frequenzen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Wir haben Ns Anfangsbedingungen, die eine Zs-dimensionale Mannigfaltigkeit bilden. Wir wollen sie z.B. als gleichverteilte Folge in E^{2s} mit einer Diskrepanz D_N^{2s} ansehen, dann können wir alles übertragen.

Wir führen die Integration von Gleichungen des kräftefreien symmetrischen Kreisels zu Ende. Dazu müssen wir die Eulerschen Winkel σ, ψ, ϑ einführen (der Eulersche Winkel σ wird traditionell mit φ bezeichnet. Wir haben aber bereits bei der Integration der Gleichungen für die Impulse p und q als Integrationskonstante mit φ bezeichnet). Die Gleichungen für die Winkel lauten bekanntlich:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = p\cos\sigma - q\sin\sigma, \quad \sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} = p\sin\sigma - q\cos\sigma$$
$$\frac{d\sigma}{dt} = r - \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta.$$

Wir tragen nun die bereits berechneten p, q, r ein:

$$p = a\cos(\lambda t + \varphi),\ q = a\sin(\lambda t + \varphi), r = r_0,$$

wo $\lambda = (1/2\pi)(1 - C/A)$ ist (φ, r_0 Integrationskonstanten). Zunächst ist $\vartheta = 0$ Lösung. Im Falle $0 \leq \vartheta \leq (\pi/2)$ erhalten wir

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0,\ \frac{d\psi}{dt} = r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right),\ \frac{d\sigma}{dt}\cos\vartheta = \frac{C}{A}r_0,$$

also als Lösungen mit den Integrationskonstanten σ_0, ϑ_0, ψ_0

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \sigma = \varepsilon t + \sigma_0, \quad \psi = \delta t + \psi_0.$$

Dabei ist $\delta = (C/A)(r_0/\cos\vartheta_0)$ die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Figurenachse um die Impulsachse rotiert, also die Präzisionsgeschwindigkeit und

$$\varepsilon = 1 + \left(1 - \frac{C}{A}\right) r_0.$$

ε ist die Eigendrehung, also die Drehgeschwindigkeit um die Figurenachse.

Die Drehung D wird gegeben durch

$$D = D_1 D_2 D_3,$$

wo

$$D_1 = \begin{bmatrix} \cos\sigma, & -\sin\sigma, & 0 \\ \sin\sigma, & \cos\sigma, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \cos\vartheta, & 0, & -\sin\vartheta \\ 0, & 1, & 0 \\ \sin\vartheta, & 0, & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} \cos\psi, & -\sin\psi, & 0 \\ \sin\psi, & \cos\psi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

ist. Wir betreiben nun Statistik im Einheitswürfel E^6 mit Hilfe einer sechsdimensionalen gleichverteilten Folge

$$\left(a_k, r_{0k}, \varphi_k, \frac{2}{\pi}\vartheta_{0k}, \frac{\sigma_{0k}}{2\pi}, \frac{\psi_{0k}}{2\pi}\right).$$

Man wird, wie bei der Planetenbegwegung, die Winkel so wählen, daß wir pythagoräische Tripel erhalten. Besonders interessant ist der Kugelkreisel $A = B = C$. Hier wird $\lambda = \varepsilon = 0$. Ein Beispiel ist der Würfel oder die Kugel.

Wir können mit den entwickelten Formeln auch den Fall mehrerer voneinander unabhängiger Kreisel, z.B. Wü rfel, die nur durch Anfangsbedingungen miteinander verknüpft sind, behandeln, so wie wir dies schon bei den Planeten getan haben.

Anmerkung 4 zu §5

Wir können nach Friedmann-Lemaître-Milne-Heckmann mit den Formeln ein Weltmodell aufbauen.

Betrachten wir (die Striche sind die Ableitungen nach der Zeit)

$$f = \frac{R'}{R},$$

dann folgt durch Differentiation

$$f' = \frac{R''}{R} - \left(\frac{R'}{R}\right)^2$$

also ist

$$f' + f^2 = -\frac{K}{R^3}.$$

Wir setzen

$$\rho = \frac{K}{R^3}$$

und es wird also

$$\rho R^3 = K.$$

Wir nennen ρ Dichte im physikalischen Sinn. Es wird

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -3\frac{K}{R^4}R' = -3\rho\frac{R'}{R}.$$

Wir haben also die Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho f = 0.$$

Wir definieren nun Teilchen $\vec{x} = (x, y, z)$

$$x(t) = x_0 r(t), \;\; y(t) = y_0 r(t), \;\; z(t) = z_0 r(t)$$

und setzen $\vec{x} = \vec{x}_0 r(t)$, (x_0, y_0, z_0) sei ein fester Punkt in R^3 Es sei

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (v_1, v_2, v_3)$$

die Geschwindigkeit dieser Teilchen. Es ist

$$\vec{v} = \vec{x} f$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 3f$$

Es wird also

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Wir haben also eine Kontinuitätsgleichung. Wir haben nun

$$\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial v_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial(v_1 v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(v_1 v_3)}{\partial x_3}\right) =$$
$$= v_1 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho\left(2v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)\right)$$
$$= (-3f^2 + f' + 4f^2)x_1 = -2\rho x_1.$$

Es gelten analoge Formeln auch für $j = 2$ bzw. $j = 3$.

Setzen wir

$$\Phi = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\rho,$$

so haben wir (für $j = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial(v_j v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(v_j v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(v_j v_3)}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}.$$

Es sind also die $x_j(t)$ die Bahnkurven einer Strömung, auf die die Kraft mit dem Potential Φ wirkt. Dieses Potential erfüllt die Poissongleichung

$$\Delta\Phi = 6\rho.$$

Dies rechtfertigt den Namen Dichte für ρ.

Es ist Φ bis auf Konstante das Potential einer Kugel K mit Mittelpunkt 0 und Radius R und konstanter Dichte ρ in einem Punkt (x, y, z) im Innern der Kugel gleich

$$2\pi\left(R^2 - \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)\rho\right).$$

Wir wollen nun zur Dichte ρ eine Folge (ξ_k, η_k) konstruieren. Zunächst wollen wir sie normieren. Es sei

$$\int_0^1 \rho(\tau, \varphi)\, d\varphi = \psi(\tau)$$

und es sei

$$\rho^*(\tau, \varphi) = \frac{\rho(\tau, \varphi)}{\psi(\tau)}.$$

Wir bemerken noch, daß für $\tau > 0$

$$\rho(\tau, \varphi) \leq \frac{1}{(\omega\tau)^6}$$

ist.

Es sei (x_k, y_k) eine gleichverteilte Folge mit Diskrepanz D_N, dann sei

$$\xi_k = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \left[1 + x_l - \int_0^{x_l} \rho^*(\varphi) d\varphi \right]$$

$$\eta_k = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \left[1 + y_k - 3 \int_0^{y_l} r^2 dr \right]$$

Es ist die Diskrepanz D_N^* dieser Folge

$$\leq \frac{1}{(\omega\tau)^6} \psi(\tau)^{-1} D_N^{1/5}$$

Es ist also für jede Funktion f von beschränkter Variation $V(f)$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_k) = 3 \int_0^1 r^2 dr \int_0^1 f(\varphi, r) \rho^*(\tau, \varphi) d\tau + \text{Fehler},$$

wo

$$|\text{Fehler}| \leq V(f) \left((\omega\tau)^6 \psi(\tau) \right)^{-1} D_N^{1/5}$$

ist.

Es ist z.B. die Häufigkeit der Punkte (ξ_k, η_k), wo $\xi_k \leq \lambda$, $\eta_k \leq R(\tau)$ (also die Häufigkeit des Staubes in der Kugel vom Radius $R(\tau)$

$$\frac{4\pi}{3} R^3(\tau) \int_0^\lambda \rho^*(\tau) d\tau.$$

Der Faktor 4π kommt von der Oberfläche der Kugel.

Anmerkung 5 zu §5

In der allgemeinen Relativitätstheorie kommt man auf das Friedmannsche Modell in folgender Weise:
Wir betrachten die Riemannsche Metrik

$$ds^2 = -r^2(t) d\sigma^2 + dt^2,$$

wo

$$d\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \gamma_{ij} dx_i dx_j$$

ist und der Energietensor T_{ij} mit den Komponenten

$$T_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 3$$
$$\text{und} \quad T_{i4} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq 3 \quad \text{und} \quad T_{44} = \rho.$$

Sollen die Einsteinschen Feldgleichungen erfüllt werden, so muß der verjüngte Krümmungstensor G_{ik} von der Gestalt

$$G_{ij} = 2\varepsilon \gamma_{ij}$$

sein mit $\varepsilon = 0, \pm 1$ und wir erhalten

$$\dot{\rho} + 3\frac{r'}{r}\rho = 0$$

und

$$2\varepsilon - 2r'^2 - rr'' = -r^2\rho.$$

Literatur

[1] Hlawka, E.: Approximation von Irrationalzahlen und pythagoräischen Tripeln, Bonner Math. Schriftenreihe **121**, 1–32 (1980).

[2] Hlawka, E.: Statistik und Gleichverteilung. Grazer Math. Berichte **335**, 1–205 (1998).

[3] Hlawka, E.: Cremonatransformation von Folgen modulo 1. Monatsh. Math. **65**, 227–232 (1961).

[4] Hlawka, E.: Über einige geometrische Anwendungen im Zusammenhang mit pythagoräischen Tripeln und gleichverteilung, aequationes Math. **58**, 1–13 (1999)

[5] Neumann, J.: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Springer, Berlin 1932.

[6] Plato, J. von.: Creating modern probability in mathematics, physics and philosophy in historical perspective. Cambridge Studies in Probability, Induction, and Decision Theory. Cambridge University Press, Cambridge 1994.

[7] Stiefel, E. L. and Scheifele, G.: Linear and regular celestial mechanic. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. **174**. Springer, Berlin Heidelberg New York 1971.

[8] Verhandlungen der Deutschen physikalischen Gesellschaft, Bd. **16** (1914).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. E. Hlawka, Institut für Analysis und Technische Mathematik der TU Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10, A-1040 Wien.